Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

11. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 11.7.08 in den Übungen

Aufgabe 11.1 *(Bose-Einstein-Kondensation)* **(10 Punkte)**

Betrachte ein ideales Bose-Gas mit Gesamtteilchenzahl N. Die Einteilchenenergieniveaus seien so normiert, dass $E_0 = 0, E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$.

(a) Begründe ausgehend von der mittleren Besetzungszahl

$$\langle n_\nu \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_\nu - \mu)} - 1},$$

dass für das chemische Potential $\mu \leq 0$ gelten muss. (3 Punkte)

(b) Nehme nun $\mu < 0$ an. Was ergibt sich dann im Grenzfall $T \to 0$ für $\langle n_\nu \rangle$ (ν beliebig)? Welches Problem ergibt sich daraus für N? (3 Punkte)

(c) Nehme nun an, dass für $T \to 0$ stets $0 < -\beta\mu \ll 1$ bleibt. Was ergibt sich in diesem Fall für die mittlere Besetzungszahl $\langle n_0 \rangle$ des energetisch tiefsten Ein-Teilchen-Niveaus und wie wird dadurch das in Aufgabenteil (b) auftretende Problem gelöst? (4 Punkte)

Aufgabe 11.2 *(Photonengas)* **(10 Punkte)**

Wir wollen nochmal das bereits in Aufgabe 6.2 behandelte Photonengas betrachten. Hier wollen wir nun die Zustandsgleichung herleiten. Photonen sind Bosonen mit $z = e^{\beta\mu} = 1$, also ist die großkanonische Zustandssumme

$$\ln Z_{grk} = \frac{pV}{kT} = -\sum_\epsilon \ln\left(1 - e^{-\epsilon/kT}\right)$$

Die Photonen befinden sich in einer kubischen Box der Kantenlänge L ($V = L^3$), wobei die Energieniveaus für die einzelnen Photonen gegeben sind durch die relativistische Beziehung $\epsilon = c|\mathbf{p}|$.

(a) Im Falle großer V kann man die Summe über die Zustände durch ein Integral ersetzen. Zeige, dass man in diesem Fall folgende formale Ersetzung vornehmen muss (beachte, dass jedes Photon zwei Spinzustände annehmen kann):

$$\sum_\epsilon \to \int \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \epsilon^2 d\epsilon$$

(5 Punkte)

(b) Führe die Integration aus und berechne aus dem Ergebnis die innere Energie $\langle E \rangle$. Zeige, dass $pV = \frac{1}{3}\langle E \rangle$.

Hinweis: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ (5 Punkte)

Aufgabe 11.3 *(Identische Teilchen)* **(10 Punkte)**

Betrachte ein System aus zwei identischen nicht-wechselwirkenden Teilchen. Jedes der Teilchen kann genau drei verschiedene Zustände mit den Energien $\epsilon_1 = -\epsilon, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = +\epsilon$ einnehmen. Das System sei in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Berechne die kanonische Zustandssumme des Systems und seine mittlere Energie $\langle E \rangle$ als Funktion von T (oder β) für die Fälle, dass beide Teilchen

(a) unterscheidbar

(b) Bosonen

(c) Fermionen

sind. Skizziere für die drei Fälle das zugehörige $\langle E \rangle - T$-Diagram.

Bonusaufgabe 11.4 *(Modifiziertes Fermigas)* **(10 Extrapunkte)**

Hinweis: Diese Aufgabe kann freiwillig gelöst werden, um den Punktestand aufzubessern.

Betrachte ein ideales Fermigas, dessen Energiespektrum die Form $\epsilon \sim |\mathbf{p}|^s$ hat, und welches sich in einer Box mit Volumen V in einem n-dimensionalen Raum befindet.

(a) Zeige, dass für dieses System gilt: $pV = \frac{s}{n} \langle E \rangle$. (6 Punkte)

(b) Drücke die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ als Funktion von β, n, s und geeigneten Fermi-Dirac-Funktionen $g_\nu(z)$ aus. (2 Punkte)

(c) Drücke $\langle E \rangle$ als Funktion von $\langle N \rangle$ und T aus. (2 Punkte)

Hinweise:

- Das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius r ist $V = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n$.
- Die Funktionen $g_\nu(z)$ sind die sog. Fermi-Dirac-Funktionen: $g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x+1}$