Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 4

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 (5 P)

Gegeben sei ein 2-dimensionaler Zustandsraum mit orthonormalen Basisvektoren $|0\rangle, |1\rangle$, die Eigenzustände einer Observable $\hat{A}$ sind. Sie haben eine Kiste gekauft, die mit sehr vielen Teilchen im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ gefüllt sein soll, haben aber den Verdacht, dass der Hersteller gespart und sie einfach je zur Hälfte mit Teilchen im Zustand $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ gefüllt hat. Können Sie durch Stichprobenmessungen von $\hat{A}$ Wahrscheinlichkeitsaussagen darüber machen, ob der Verdacht zutrifft (mit Begründung)? Konstruieren Sie eine Observable $\hat{O}$, mit der dies im Prinzip möglich ist.

Aufgabe 2 Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild (15 P)

Wir betrachten die Zeitentwicklung im Fall eines Hamilton-Operators $\hat{H}$, der nicht explizit von der Zeit abhängt. Im Heisenberg-Bild liegt die Zeitentwicklung des Systems komplett in den Operatoren, während die Zustände zeitunabhängig sind. Beide Zugänge sind äquivalent.

a) Zeigen Sie, dass $|\psi, t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle$ die Schrödinger-Gleichung löst.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ die Heisenberg-Gleichung löst.

c) Zeigen Sie, dass $\langle\psi, t|\hat{A}|\psi, t\rangle = \langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle$.

d) Der Zustand $|x_0; t_0\rangle$ im Heisenberg-Bild soll ein Teilchen beschreiben, das zum Zeitpunkt t_0 am Ort x_0 lokalisiert ist. Zeigen Sie, dass $|x_0; t_0\rangle = e^{i\hat{H}t_0/\hbar}|x_0\rangle$ (vgl. Zeitentwicklung im Schrödinger-Bild, mit der man diesen Formalismus nicht verwechseln darf). Berechnen sie dazu zuerst $\hat{x}(t_0)$.

e) Zeigen Sie, dass $e^{-ic\hat{p}/\hbar}|x\rangle = |x + c\rangle$. Finden Sie den Operator, der $|x_1; t_1\rangle$ in $|x_2; t_2\rangle$ überführt. Wie vereinfacht er sich für den Fall, dass Impulserhaltung gilt? Was ist die physikalische Bedeutung von $\langle x_1; t_1|x_2; t_2\rangle$? (vgl. Vorlesung)

f) Es soll $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p}) = T(\hat{p}) + V(\hat{x})$ sein. Zeigen Sie im Heisenberg-Bild anhand der Vertauschungsrelation, dass

$$\frac{d}{dt}\hat{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\hat{x}, \hat{p}) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(\hat{x}, \hat{p})\,.$$

Bonusfragen: In welcher Näherung/in welchem Sinn gelten diese Gleichungen auch für allgemeines $\hat{H}$? Wie müssen V, T geschaffen sein damit $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ immer die *klassischen* kanonischen Bewegungsgleichungen erfüllen? Betrachten Sie dazu den Erwartungswert von obigem Ergebnis.

Aufgabe 3 Datenbanksuchen mit Quantencomputern (10 P)

Die Suche nach einem bestimmten Datensatz in einer unsortierten Datenbank mit N Einträgen erfordert durchschnittlich $N/2$ Vergleichsoperationen. Liegen die Daten in einem Quantencomputer als quantenmechanischer Überlagerungszustand $|D\rangle$ vor, reichen im Prinzip $\sim \sqrt{N}$ Quantenoperationen und eine einzige Messung. Der folgende berühmte Algorithmus stammt von K.L. Grover [1]. Er wurde vor kurzem zu Testzwecken in einem einfachen Quantencomputer realisiert [2]. Die Strategie besteht darin, den Ausganszustand $|D\rangle$ durch geschickte Wahl des Hamiltonoperators in solcher Weise unitär zu transformieren, dass im Anschluss die Messung einer

Observable $\hat{K}$ mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit die gesuchte Antwort liefert.

Unsere Datenbank soll N unterschiedliche Einträge $d_1 \dots d_N$ haben, die der Einfachheit halber ganze Zahlen $d_k \in 1 \dots n$ sind. Die Problemstellung lautet: *Ermittle die Position $\tilde{k}$ eines bestimmten Eintrags $\tilde{d} = d_{\tilde{k}}$ in der Datenbank.* Wir benötigen hier einen $N \times n$ - dimensionalen Zustandsraum. Eine Orthonormalbasis sei gegeben durch die Zustände

$$|k; d\rangle \quad \text{mit} \quad k = 1 \dots N,\, d = 1 \dots n\,.$$

Sie erfüllen $\langle k; d|l; e\rangle = \delta_{kl}\delta_{de}$. Für die Observable $\hat{K}$ gelte

$$\hat{K}|k; d\rangle = k|k; d\rangle\,.$$

Wir können nun jeden *möglichen* Datenbankeintrag durch einen dieser Basisvektoren darstellen. Steht z.B. an 5. Stelle in der Datenbank die Zahl 100, ordnen wir den Basisvektor $|5; 100\rangle$ zu. Man kann nach diesem Schema den *gesamten* Datenbankinhalt als *einen* Überlagerungszustand

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} |k; d_k\rangle$$

schreiben.

a) Zeigen Sie, dass $|D\rangle$ normiert ist und berechnen Sie $\langle \tilde{k}; \tilde{d}|D\rangle$.

b) Gegeben sei der Zustand $|D\rangle$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(K = \tilde{k})$, beim Messen von $\hat{K}$ jetzt bereits das gewünschte Ergebnis $K = \tilde{k}$ zu bekommen?
Hinweis: Argumentieren Sie, dass $P(K = \tilde{k}) = |\langle \tilde{k}; \tilde{d}|D\rangle|^2$. Vergleichen Sie mit der klassischen Suche.

c) Man nutzt die Zeitentwicklungsoperatoren

$$\hat{U} \equiv I - 2\sum_{l=1}^{N} |l; \tilde{d}\rangle\langle l; \tilde{d}| \quad \text{und} \quad \hat{V} \equiv I - 2|D\rangle\langle D|\,.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{U}$ und $\hat{V}$ unitär sind. Wie wirken $\hat{U}$ und $\hat{V}$ auf die Basiszustände und $|D\rangle$?

d) Gegeben sei wieder der Zustand $|D\rangle$. Wir führen nun mit unserem Quantencomputer *ohne zu messen* einmal die unitäre Transformation ("Grover-Iteration")

$$|D\rangle \longrightarrow -\hat{V}\hat{U}|D\rangle = |D_1\rangle$$

durch und messen anschliessend $\hat{K}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P_1(K = \tilde{k}) = |\langle \tilde{k}; \tilde{d}|D_1\rangle|^2$? Hat sie sich gegenüber b) verbessert?

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P_r(K = \tilde{k}) = |\langle \tilde{k}; \tilde{d}|D_r\rangle|^2 = |\langle \tilde{k}; \tilde{d}|(-\hat{V}\hat{U})^r|D\rangle|^2$ nach r-maliger Anwendung der Transformation?

Schreiben Sie hierzu $|D\rangle$ und $|D_r\rangle$ als orthogonale Kombination

$$|D\rangle = \sin\phi_0|\tilde{k}; \tilde{d}\rangle + \cos\phi_0|T\rangle, \quad |D_r\rangle = \sin\phi_r|\tilde{k}; \tilde{d}\rangle + \cos\phi_r|T\rangle$$

und zeigen Sie dass $\sin\phi_0 = 1/\sqrt{N}$. Führen Sie eine vollständige Induktion über r durch, indem Sie die Änderung des Winkels ϕ_r pro Iteration berechnen. Zeigen Sie damit, dass $\phi_r = (2r + 1)\phi_0$ und somit

$$P_r(K = \tilde{k}) = \sin^2\Big((2r + 1)\phi_0\Big)\,.$$

Betrachten Sie den Fall $N \gg 1$. Wie muss man r wählen um mit grosser Sicherheit das gewünschte Ergebnis $K = \tilde{k}$ zu messen?

Literatur

[1] *arxiv.org/pdf/quant-ph/9605043,* *arxiv.org/abs/1201.1707*
de.wikipedia.org/wiki/Grover-Algorithmus, en.wikipedia.org/wiki/Grover's_algorithm
Siehe auch: *arxiv.org/abs/quant-ph/9508027,* *de.wikipedia.org/wiki/Shor-Algorithmus*

[2] *dornsife.usc.edu/news/stories/1126/quantum-computer-built-inside-a-diamond/*