Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 11

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 (3+3+3+3+2+2+4 P)

a) Betrachten Sie ein ein freies Teilchen in einer Dimension mit $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\psi(x,t) = \langle x|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi_0\rangle$$

die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung erfüllt.

b) Wir betrachten ein freies Teilchen in drei Dimensionen. Die Wellenfunktion zum Zeitpunkt t_1 sei gegeben durch $\psi_0(\vec{x})$. Geben Sie mittels Fouriertransformationen einen Ausdruck für die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ an.

c) Gegeben sei eine würfelförmige Kiste mit Seitenlänge a, in der sich ein Teilchen der Masse m befindet. Das Potential im inneren der Kiste verschwindet ($V = 0$), die Wände stellen jedoch einen unendlich hohen Potentialwall dar (d.h. die Wellenfunktion des Teilchens verschwindet dort). Geben Sie die Energie-Eigenfunktionen und die Energieniveaus an.

d) Zeigen Sie anhand der Eigenschaften des Kommutators, dass im Heisenberg-Bild Produkte von zeitlich erhaltenen Observablen wieder einem zeitlich erhaltenen Operator entsprechen.

e) Der Hamiltonoperator eines Teilchens in drei Dimensionen sei gegeben durch $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{P}}^2 + k\,\hat{X}_1\hat{X}_2$. Welche Erhaltungsgrössen gibt es?

f) Welche Erhaltungsgrössen gibt es für $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + 2\hat{P}_3^2\right)$?

g) Betrachten Sie ein Teilchen in drei Dimensionen. Das Potential sei gegeben durch

$$V(x,y,z) = -k\delta(x)$$

(eine delta-Potentialwand). Finden Sie ausgehend vom eindimensionalen Fall einen Ansatz für die Energie-Eigenfunktionen, und geben Sie die Wellenfunktionen für alle Zustände negativer Energie an.

Aufgabe 2 Spin und Bahndrehimpuls (2+4+1+2+1 P)

Wir betrachten ein zwei-Zustands-System. Die Basis des Hilbertraums ist gegeben durch $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis der spurfreien hermiteschen 2×2-Matrizen bilden. Wir definieren $\tau^i \equiv \hbar\sigma^i/2$.

b) Angenommen, Sie haben einen kontinuierlichen Strahl von Teilchen die im Zustand $|0\rangle$ präpariert sind. Sie führen an allen Teilchen im Strahl eine Messung der Observable $\hat{A} \equiv \sin\varphi\, \tau^1 + \cos\varphi\, \tau^3$ durch. Welche Messergebnisse treten mit welcher Wahrscheinlichkeit auf? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich die Teilchen des Strahls hinter der Messanordnung in welchem Zustand?

c) Zeigen Sie, dass τ^i die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}^i$. Zeigen Sie das selbe für $\hat{J}^i = \hat{L}^i + \tau^i$ (es gilt $[\tau^i, \hat{L}^j] = 0$).

d) Sei $\hat{L}^i$ als Differentialoperator auf Kugelkoordinaten gegeben. Geben Sie explizit Eigenfunktionen von $\hat{J}^3$ der Form $\begin{pmatrix} f(\theta,\phi) \\ g(\theta,\phi) \end{pmatrix}$ zu drei Eigenwerten Ihrer Wahl an. Was sind die Eigenwerte von $\hat{J}^3$?

e) Der Hamilton-Operator sei gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \tau^i \hat{L}^i \,.$$

Zeigen Sie, dass weder $\hat{L}^i$ noch τ^i, aber statt dessen $\hat{J}^i$ eine Erhaltungsgrösse ist. Was ist die physikalische Interpretation dieses Umstands?